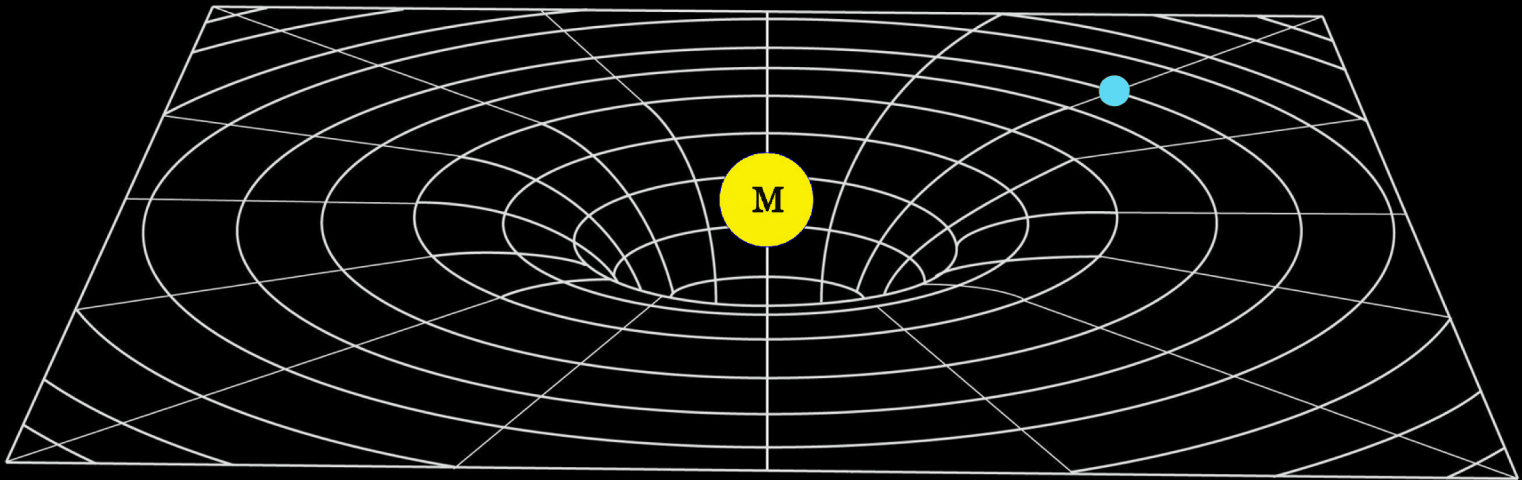
Luciano Ancora

RELATIVITA' FACILE

I - LA RELATIVITA' RISTRETTA
II - LA RELATIVITA' GENERALE

I - LA RELATIVITA' RISTRETTA

Questo articolo è una sintesi tratta dal primo paragrafo del saggio: Relatività: Esposizione divulgativa di A. Einstein. Si tratta in pratica di una trascrizione delle sottolineature sul testo, da me usate per fissarne i concetti, insieme ad un paio di derivazioni matematiche tratte dai miei appunti scolastici, e poche altre considerazioni.

I - LA TEORIA DELLA RELATIVITA' RISTRETTA

1. Il significato fisico delle proposizioni geometriche

La geometria di Euclide prende l'avvio da alcuni concetti fondamentali, come *piano, punto, retta,* e da alcune proposizioni semplici *(assiomi).* Le proposizioni vengono poi ricondotte a questi assiomi, cioè vengono dimostrate. Una proposizione risulterà dunque corretta *(vera)* quando è stata derivata dagli assiomi.

Ai concetti geometrici corrispondono piú o meno esattamente degli oggetti in natura, e questi ultimi costituiscono senza dubbio la causa esclusiva della genesi di quei concetti. La geometria può prescindere da ciò, al fine di dare al proprio edificio la maggiore unità logica possibile.

Se aggiungiamo alle proposizioni della geometria euclidea l'unica proposizione che a due punti su un corpo praticamente rigido corrisponde sempre la stessa *distanza,* indipendentemente dai mutamenti di posizione che possiamo imprimere al corpo, allora la geometria a cui sia stata fatta quest'aggiunta può essere trattata come un ramo della fisica. Per il momento ammetteremo la *verità* delle

proposizioni geometriche; nella *Teoria della relatività generale* questa verità è limitata.

2. Il sistema delle coordinate

In base all'interpretazione fisica di distanza, siamo in grado di stabilire, per mezzo di misurazioni, la distanza fra due punti situati su un corpo rigido. Ci occorre a questo scopo un *intervallo (regolo S)* come campione unitario.

Ogni descrizione spaziale del luogo di un evento o di quello di un oggetto viene compiuta specificando su un corpo rigido *(corpo di riferimento)* il punto con il quale coincide quel dato evento od oggetto.

Usando il sistema delle coordinate cartesiane, il luogo di un evento qualsiasi sarà determinato dalla specificazione delle lunghezze delle tre coordinate *(x, y, z)*, determinate mediante *regoli-campione* con manipolazioni compiute secondo i metodi prescritti dalla geometria euclidea.

3. Spazio e tempo nella meccanica classica

Lo scopo della meccanica è di descrivere in qual modo i corpi mutano col *tempo* la loro posizione nello *spazio*.

Io sto al finestrino di un vagone ferroviario che viaggia con velocità uniforme, e lascio cadere una pietra sulla banchina. Prescindendo dalla resistenza dell'aria, vedo discendere la pietra in linea retta. Un pedone, che osserva il fatto dalla banchina, vede che la pietra cade a terra descrivendo un arco di parabola. Se in luogo dell'espressione *corpo di riferimento* introduciamo il concetto, utile per la descrizione matematica, di *sistema di coordinate*, siamo in grado di dire: la pietra percorre una linea retta relativamente a un sistema di coordinate rigidamente collegato al vagone mentre descrive una parabola relativamente a un sistema di coordinate rigidamente collegato al terreno

(banchina). Non esiste una traiettoria in sé, ma soltanto una traiettoria rispetto a un particolare corpo di riferimento.

Per ottenere una descrizione completa del movimento, dobbiamo specificare in che modo il corpo altera la propria posizione col *tempo*. Bisognera dare una definizione di tempo tale che, i valori del tempo risultino grandezze osservabili *(risultati di misurazioni)*. Immaginiamo due orologi identici in mano agli osservatori. Ciascuno di essi determinerà in quale precisa posizione del rispettivo corpo di riferimento si trova la pietra a ogni tic del proprio orologio.

4. Il sistema di coordinate galileiano

Il *principio di inerzia* della meccanica di Galileo-Newton, si enuncia: un corpo permane in uno stato di quiete o di moto rettilineo uniforme. Un sistema di coordinate il cui stato di moto sia tale che il principio di inerzia risulti valido con riferimento a esso, viene detto *sistema di coordinate galileiano*. Le leggi della meccanica di Galileo-Newton sono valide soltanto per un sistema di coordinate galileiano.

5. Il principio di relatività (nel senso ristretto)

Se *K* è un sistema di coordinate galileiano, allora è pure galileiano ogni altro sistema di coordinate *K’* che si trovi, rispetto a *K*, in uno stato di moto traslatorio uniforme. Rispetto a *K’* le leggi della meccanica di Galileo-Newton sono valide esattamente come lo sono rispetto a *K*.

Estendendo diremo che i *fenomeni naturali* si svolgono rispetto a *K’* secondo le stesse precise regole generali come rispetto a *K*. Questo enunciato viene detto *Principio di relatività (nel senso ristretto)*.

Di fronte però al piú recente sviluppo dell'*elettrodinamica* e dell’*ottica*, risultò che la meccanica classica offre una base *insufficiente* per la descrizione fisica di tutti i fenomeni naturali. A

questo punto il problema della validità del principio di relatività fu posto in discussione.

Fra tutti i sistemi di coordinate galileiani possibili, se ne scelga come corpo di riferimento uno ben determinato *(K_o)* che chiamiamo *assolutamente in quiete*, e chiamiamo in *moto* tutti gli altri sistemi galileiani *K*. Sia la banchina del nostro esempio il sistema K_o, e il vagone ferroviario un sistema *K*, con delle leggi meno semplici di quelle valide rispetto a K_o, per il fatto che *K* risulta in moto rispetto a K_o.

6. Il teorema di addizione per le velocità secondo la meccanica classica

Supponiamo che il vagone ferroviario viaggi sulle rotaie con una velocità costante v, e che una persona cammini entro tale vagone nella direzione di marcia con una velocità w. Con quale velocità W la persona avanza rispetto alla banchina?

Si ha che $W = v + w$ rispetto alla banchina. Vedremo che questo risultato, il quale esprime il *teorema di addizione per le velocità* secondo la meccanica classica, non è valido nella realtà.

7. L'apparente incompatibilità fra la legge di propagazione della luce e il principio di relatività

La propagazione della luce in uno spazio vuoto ha luogo in linea retta con una velocità *c = 300000 chilometri al secondo*. Questa velocità non dipende dalla velocità del moto del corpo che emette la luce. Questa è la *legge della costanza della velocità c della luce (nel vuoto).*

Come sistema di riferimento scegliamo ancora una volta la nostra banchina ferroviaria. Viene lanciato un raggio di luce la cui estremità avanza con velocità c rispetto alla banchina. Il nostro vagone viaggi lungo le rotaie con velocità v, nella stessa direzione e verso del raggio

di luce. La velocità di propagazione del raggio di luce relativamente al vagone sarà: $w = c - v$, inferiore a c.

Questo risultato è in conflitto col principio di relatività: la legge di propagazione della luce nel vuoto deve essere uguale tanto per il vagone ferroviario quanto per le rotaie.

Per uscire da questa contraddizione bisognerebbe abbandonare o il principio di relatività o la legge di propagazione della luce nel vuoto. Ma lo sviluppo della fisica teorica ha dimostrato che le esperienze conducono in modo inequivocabile a una teoria dei fenomeni elettromagnetici che ha per conseguenza necessaria la legge della costanza della velocità della luce nel vuoto.

A questo punto entra in campo la *Teoria della relatività ristretta*, che, analizzando i concetti fisici di tempo e di spazio, evidenzia che nella realtà non esiste la minima incompatibilità fra il principio di relatività e la legge di propagazione della luce.

8. Sul concetto di tempo nella fisica

Un fulmine ha colpito *simultaneamente* le rotaie della nostra linea ferroviaria in due punti *A* e *B*.

Per verificare la simultaneità, verrà messo un osservatore nel punto di mezzo *M* dell'intervallo *AB*, con due specchi inclinati a 90 gradi. Se l'osservatore percepisce i due bagliori del fulmine nel medesimo istante, essi saranno allora simultanei.

La definizione sarebbe corretta, se la luce viaggia lungo l'intervallo *AM* con la stessa velocità con cui viaggia lungo l'intervallo *BM*. Una verifica di quest'ipotesi sarebbe possibile se avessimo a nostra disposizione i mezzi per misurare il tempo

Per una definizione di *tempo* nella fisica, supponiamo che orologi di costruzione identica vengano collocati nei punti *A, B* e *C* della linea ferroviaria (sistema di coordinate), e vengano regolati in modo che le loro lancette abbiano *simultaneamente* le medesime posizioni. In queste condizioni intendiamo per tempo di un evento la lettura (posi-

zione delle lancette) di quello fra tali orologi che si trova nell'immediata vicinanza (spaziale) dell'evento in esame.

9. La relatività della simultaneità

Un treno molto lungo viaggi sulle rotaie con la velocità costante v e nella direzione indicata dalla figura 1.

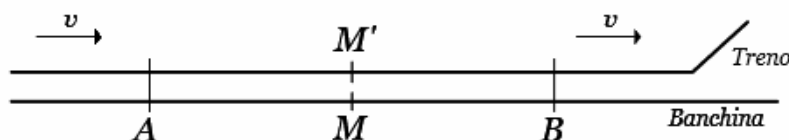



Figura 1

Due eventi (per esempio i due colpi di fulmine A e B) che sono simultanei rispetto alla banchina ferroviaria saranno tali anche rispetto al treno?

Sia M' il punto medio dell'intervallo AB sul treno in moto. Quando si verificano i bagliori del fulmine, questo punto M' coincide con il punto M, ma esso si muove verso la destra del diagramma con la velocità v del treno. L'osservatore in M' vedrà il raggio di luce emesso da B *prima* di vedere quello emesso da A. Risultato: gli eventi che sono simultanei rispetto alla banchina non sono simultanei rispetto al treno e viceversa *(relatività della simultaneità)*; ogni sistema di coordinate ha il suo proprio tempo particolare

10. Sulla relatività del concetto di distanza spaziale

Consideriamo due punti A' e B' sul treno che viaggia lungo la banchina con la velocità v. Determiniamo i punti A e B della banchina accanto ai quali passano i due punti A' e B' in un particolare istante t,

giudicato dalla banchina. Se la persona che si trova sul vagone percorre in un'unità di tempo, *misurata dal treno*, l'intervallo $A'B'$, non è detto che l'intervallo AB, *misurato dalla banchina*, risulti uguale ad $A'B'$.

11. La trasformazione di Lorentz

I risultati degli ultimi due paragrafi mostrano che i concetti fisici di simultaneità e di distanza spaziale sono relativi, cioè dipendono dalle condizioni di moto del sistema a cui si riferiscono, contro le ipotesi della meccanica classica considerate.

L'apparente disaccordo incontrato al paragrafo 7, fra la legge di propagazione della luce ed il principio di relatività galileiano, viene risolto determinando l'*entità esatta* delle variazioni spazio-temporali di un evento, nel passaggio dal sistema di coordinate x, y, z, t (della banchina) al sistema x', y', z', t' (del treno).

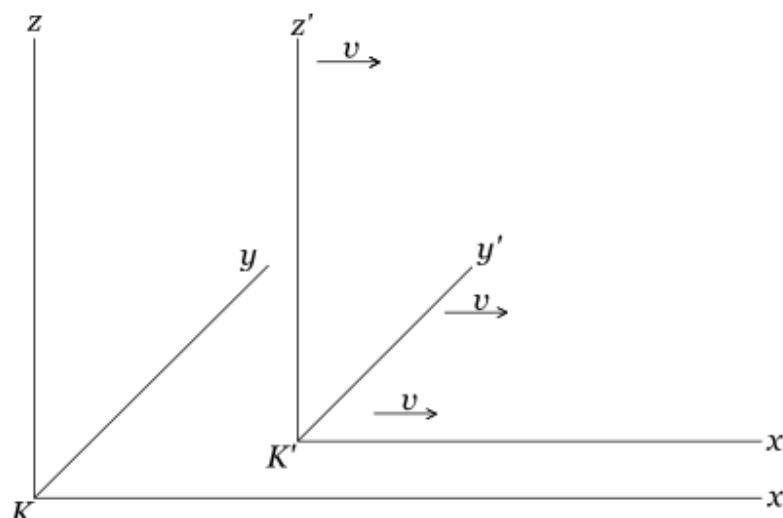



Figura 2

Quando i sistemi di coordinate son orientati nello spazio come indicato nella figura 2, tale problema viene risolto mediante le equazioni seguenti:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Questo sistema di equazioni è noto col nome di *Trasformazione di Lorentz.*

La trasformazione di Galileo si ricava dalla trasformazione di Lorentz ponendo in quest'ultima un valore infinitamente grande in luogo della velocità *c* della luce.

Supponiamo ora che un segnale luminoso venga lanciato lungo l'asse positivo *x*, e che l'eccitazione luminosa si propaghi secondo l'equazione $x = ct$, cioè con la velocità *c*. Se sostituiamo a *x* il valore *ct* nella prima e nella quarta equazione della trasformazione di Lorentz, otteniamo:

$$x' = ct' .$$

Questa è l'equazione cui soddisfa la propagazione della luce, riferita al sistema *K'*. Vediamo così che la velocità di trasmissione rispetto al corpo di riferimento *K'* risulta anch'essa uguale a *c*.

Non dobbiamo stupirci di ciò, giacché le equazioni della trasformazione di Lorentz sono proprio state derivate in conformità a questo punto di vista.

Può sembrare che il maggior merito nello sviluppo della teoria della relatività ristretta debba essere attribuito a Lorentz, invece che ad Einstein, ma non è così. E' vero che Lorentz fu il primo ad introdurre in elettrodinamica il fattore matematico

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

secondo cui, in teoria della relatività, i regoli si contraggono ed i tempi si dilatano, ma va esclusivamente ad Einstein il grande merito dell'aver combinato la trasformazione di Lorentz con il principio di relatività in una teoria che è risultata poi di grande aiuto euristico nella ricerca delle leggi generali della natura.

12. Risultati della teoria

La teoria della relatività ristretta impone quindi un riesame delle leggi della fisica. Si accetteranno le leggi fisiche che risultino identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

In *dinamica relativistica* cerchiamo una definizione della *quantità di moto* che sia *invariante per trasformazioni di Lorentz.* La definizione newtoniana: $p = m_o v$, dove m_o è la *massa a riposo*, va riformulata come segue:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m_0 c \beta \gamma \qquad (\beta = v/c; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}})$$

Consideriamo il quadrato di p:

$$p^2 = m_0{}^2 c^2 \beta^2 \gamma^2 \qquad (1)$$

per $v=0$ (riposo), si ha l'identità:

$$\frac{1}{1-v^2/c^2} - \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2} = 1 \qquad \textit{cioè} \qquad \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1$$

moltiplicando per $m_o^2 c^4$, si ha:

$$m_o^2 c^4 (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) = m_o^2 c^4$$

cioè, per la (1):

$$m_0^2 c^4 \gamma^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \qquad (2)$$

Poichè la massa a riposo è costante, la grandezza $m_o^2 c^4$ risulta *invariante per trasformazioni di Lorentz.*

Se definiamo l'*energia totale relativistica*:

$$E = m_0 c^2 \gamma$$

otteniamo dalla (2):

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \qquad (3)$$

che quindi risulta *invariante per trasformazioni di Lorentz.*

La *massa relativistica m* si relaziona con la massa a riposo m_o, tramite il fattore di Lorentz:

$$m = \gamma m_0$$

per cui, se $v=0$ (riposo), $p=0$, m ed m_o coincidono e la (3) si scrive, *con la massa relativistica m*:

$$E = m c^2$$

Lo stesso Einstein spiegava così questa formula: “Dalla teoria della relatività si ricava che massa ed energia sono entrambe differenti

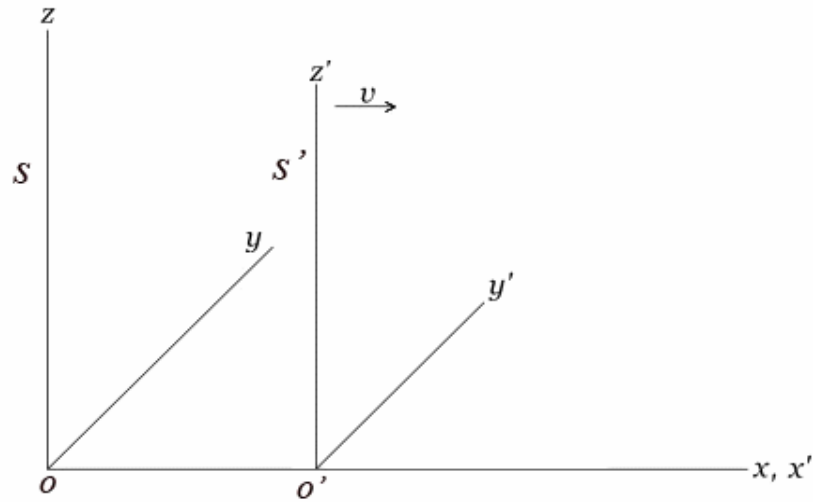
manifestazioni della stessa cosa, un concetto non di immediata comprensione per l'uomo della strada. Inoltre, l'equazione *E* uguale a *m* moltiplicato per *c* elevata al quadrato, che significa che l'energia è uguale alla massa moltiplicata per il quadrato della velocità della luce, mostra che piccolissime quantità di massa possono essere trasformate in una immensa quantità di energia e viceversa. La massa e l'energia sono infatti equivalenti, secondo la formula appena citata. Questo è stato dimostrato da Cockroft e Walton nel 1932 in un esperimento".

Anche qui sorgono dubbi sulla paternità di questa importante scoperta. Altri studiosi avevano già messo in relazione la massa e l'energia. La formula $E = mc^2$ *era stata avanzata da Poincaré nel 1900, senza una dimostrazione. Tolver Preston, basandosi sulla stessa equazione, aveva previsto, molti anni prima, l'energia atomica e la super-conduttività. Infine, un agronomo italiano, De Pretto, aveva pubblicato la formula, due anni prima. Tuttavia, Einstein fu il primo a presentare seriamente questo risultato, come parte di una teoria più grande, derivandolo dalla sua Teoria della Relatività.*

La mia opinione personale è che la formula più famosa della scienza, già intuita da diversi ricercatori in quegli anni che sconvolsero la fisica, sia stata tempestivamente adattata da Einstein alla sua nascente Teoria della Relatività (avendo egli intuito che da essa derivava) con un procedimento di dimostrazione eseguito a ritroso, attraverso sapienti manipolazioni delle grandezze fisiche coinvolte.

APPENDICE

13. Derivazione della Trasformazione di Lorentz

Cerchiamo una traformazione per cui la velocità della luce c risulti indipendente dal moto dell'osservatore.

Una sorgente luminosa, ferma nell'origine O di S, emette un impulso di luce al tempo $t=0$. Il fronte d'onda sferico raggiungerà il punto $P(x,y,z)$ al tempo $t = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}/c$ per cui, in S, l'equazione del fronte d'onda sferico è:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \qquad (1)$$

Al tempo $t=0$, le origini O ed O' concidano, e sia anche $t'=0$. Allora, per un osservatore in S', l'equazione del fronte d'onda sarà:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \qquad (2)$$

Nel sistema S', in moto come in figura, per la trasformazione di Galileo, si hanno:

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t \qquad (3)$$

che sostituite nella (2) danno:

$$x^2 - 2xvt + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \qquad (4)$$

che è in disaccordo con la (1).

Perchè sia valido il principio della costanza di c, deve esistere una trasformazione che si riduca a quella di Galileo per v/c tendente a zero e che trasformi esattamente la (2) nella (1) .

La trasformazione del tempo t' = t deve essere modificata, per eliminare i termini indesiderati $- 2xvt + v^2t^2$.

Proviamo con la trasformazione:

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t + fx \qquad (5)$$

dove f è una costante da determinare. Allora la (2) diventa:

$$x^2 - 2xvt + v^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + 2c^2ftx + c^2f^2x^2 \qquad (6)$$

Osserviamo che i termini con xt si elidono se si pone:

$$f = - v/c^2$$

Con questo valore di f, la (6) diventa:

$$x^2 (1 - v^2/c^2) + y^2 + z^2 = c^2t^2 (1 - v^2/c^2)$$

che può essere ricondotta alla (1), eliminando il fattore di scala indesiderato $(1 - v^2/c^2)$. Ciò si ottiene modificando la trasformazione di prova (5) nel modo seguente:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Questa è la *Trasformazione di Lorentz* che si cercava.
Essa si riduce a quella di Galileo per v/c tendente a 0, e sostituita nella (2) dà:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

esattamente come richiesto.

II - LA RELATIVITA' GENERALE

In questa seconda parte di Relatività Facile, che tratta l'argomento più complesso della Relatività Generale, il testo guida di Einstein, usato nella prima parte, è stato abbandonato. Mi è servito solo per costruire la scaletta dei vari argomenti, che ho approfondito invece, con una ricerca più estesa, consultando alcuni appunti e testi della mia biblioteca personale ed alcuni articoli rinvenuti sulla rete.

II - LA TEORIA DELLA RELATIVITA' GENERALE

Einstein riteneva che la sua teoria della relatività ristretta, limitata cioè ai sistemi inerziali, potesse essere estesa (generalizzata) includendovi i sistemi non inerziali. Egli pensava cioè, che tutti i sistemi di riferimento dovessero essere equivalenti nella formulazione delle leggi fisiche. Per realizzare la *Teoria della relatività generale*, egli formulò (1908) il *Principio di equivalenza*, secondo il quale non è possibile distinguere fra i fenomeni che si osservano in un campo gravitazionale uniforme, e quelli che si osservano in un sistema che si muove con accelerazione costante. La relatività ristretta elimina l'incongruenza fra la *meccanica classica* e l'*elettromagnetismo* , ma crea una nuova contraddizione, questa volta con la *teoria della gravitazione di Newton*, che è compatibile con il principio di relatività Galileiano, ma non lo è con il principio di relatività ristretta. La legge di Newton non è invariante per trasformazioni si Lorentz. Per risolvere il problema, occorre formulare una nuova teoria, che risulterà in sostanza una nuova descrizione (relativistica) del campo gravitazionale. Un forte impulso allo sviluppo di una tale teoria, lo ha dato lo stesso Einstein enunciando il suo *principio di equivalenza*.

1. Massa inerziale e massa gravitazionale

Galileo, nel suo famoso esperimento sulla caduta dei gravi, dimostrò che la gravità è indipendente dalla massa.
Nell'equazione del moto:

$$F = m_i \, a$$

entra in gioco la *massa inerziale* m_i di un corpo in moto accelerato.
La legge di Newton:

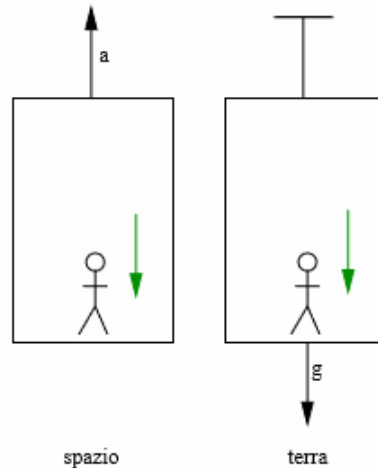
$$F = G \frac{M \, m_g}{r^2}$$

considera invece la *massa gravitazionale* m_g di un corpo in caduta libera.
Si ha:

$$a = \frac{F}{m_i} = \frac{GM}{r^2} \frac{m_g}{m_i} = g \;\; (accelerazione \; di \; gravità)$$

cioè, l'equivalenza $m_i = m_g$ osservata da Galileo (1), implica che il moto di un corpo in un campo gravitazionale non dipende dalle proprietà del corpo, cioè: g è una proprietà della Terra, per cui tutti i corpi vi cadono con la stessa accelerazione di gravità.

(1) Mi piace pensare a questo esperimento considerando il paradosso seguente. L'inerzia è la proprietà della massa di resistere al moto. Per effetto di questa proprietà, presa singolarmente, dei due corpi in caduta, quello più pesante viaggerebbe più lentamente, contro il senso comune.

Einstein spiega, con un *esperimento mentale*, che è impossibile determinare il proprio stato di moto stando all'interno di una stanza chiusa.

L'osservatore, a causa dell'equivalenza tra m_i ed m_g, non ha modo di distinguere se la forza che lo attrae verso il pavimento sia dovuta alla gravità o ad un'accelerazione verso l'alto di pari intensità. Se la stanza è in caduta libera, la gravità vi si annulla, e l'osservatore non è in grado di capire se si trova in una zona dell'universo senza campo gravitazionale o se invece cade verso un pianeta.
Vediamo come funziona il principio di equivalenza nello sviluppo della teoria della relatività generale.
La possibilità di ottenere un riferimento inerziale (la stanza in caduta libera), per l'uguaglianza $m_i = m_g$, suggerisce ad Einstein l'idea di un *laboratorio* in cui studiare il moto di una massa inerziale m_i, applicandovi i principi della dinamica classica e le trasformazioni della relatività ristretta. Si ottiene così una descrizione *equivalente* a quella che si avrebbe considerando l'aspetto gravitazionale della massa, m_g, considerata come immersa in un campo gravitazionale, in cui il moto studiato seguirebbe invece le leggi della gravitazione universale. Ma Einstein dovrà considerare il suo laboratorio come infinitamente piccolo, situato nell'intorno infinitesimo di un punto dello spazio in esame, cioè nell'approssimazione locale in cui è lecito adoperare la meccanica classica e le trasformazioni di Lorentz.

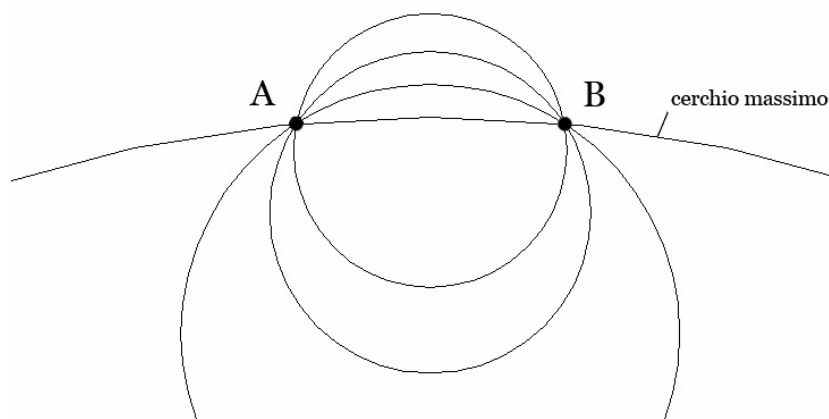
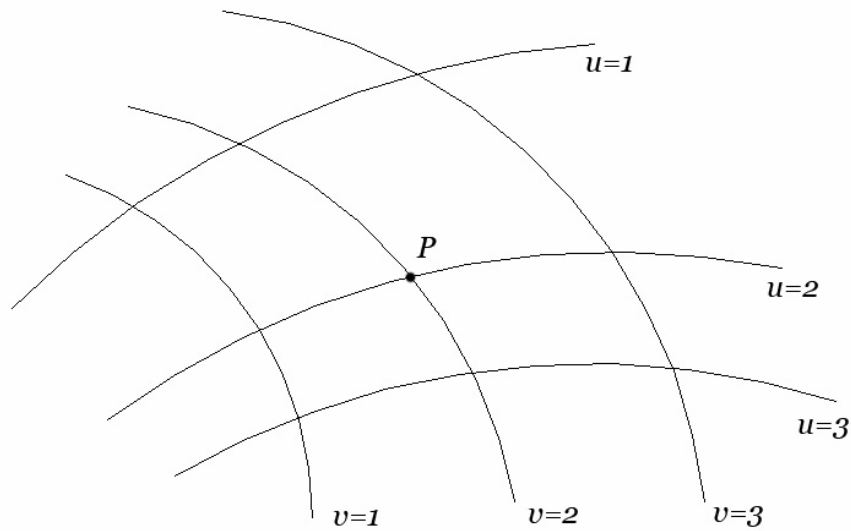
Entra così in gioco lo spazio infinitamente piccolo, che si studia con la geometria differenziale, che qui dovrà essere *quadridimensionale*, essendovi coinvolte le trasformazioni di Lorentz dello spazio-tempo.
In una tale geometria, di tipo *riemanniano* (n-dimensionale), sono coinvolte entità matematiche, dette *tensori*, che descrivono in maniera molto efficace le proprietà dello spazio. Fra questi, di particolare interesse è il cosiddetto *tensore metrico*, che governa tutta la geometria dello spazio, definendovi le nozioni operative di *distanza*, *angolo*, *lunghezza di una curva*, *geodetica*, *curvatura*.
I risultati di un tale studio, estesi ai punti vicini attraverso le trasformazioni di Lorentz, copriranno tutto lo spazio, e ne risulterà una descrizione dello spazio stesso, e quindi la descrizione del campo che lo ha generato. Il risultato finale sono le *Equazioni del campo*, che descrivono il campo gravitazionale attraverso la geometria dello spazio-tempo curvo che esso genera, descritta da alcuni *tensori speciali* che vedremo in seguito.
C'è da sottolineare che la curvatura dello spazio-tempo non è solo spaziale: tutte e quattro le dimensioni sono *piegate*, inclusa quella temporale (non potrebbe essere altrimenti, visto che spazio e tempo sono *mescolati* insieme, per definizione).

2. Sistemi localmente inerziali

Un sistema solidale con la superficie terrestre, non è inerziale. In un sistema inerziale non c'è la gravità (che consente di provare la rotazione della Terra con il pendolo di Foucault). Se la stanza dell'esperimento è in caduta libera, la gravità si annulla, e la stanza può essere considerata un sistema inerziale. Ciò non è possibile per una stanza di dimensioni paragonabili alla Terra, perchè la gravità vi sarebbe rivelata dalla sua variazione in punti diversi. Perciò prenderemo in esame sistemi localmente inerziali, in cui l'inerzialità è valida solo nell'intorno infinitesimo di un punto.
L'effetto di immettere un campo gravitazionale nello spazio è quello di frantumare il sistema di riferimento inerziale in un'infinità di sistemi di riferimento inerziali locali distinti l'uno dall'altro. Lo scopo della relatività generale è quello di descrivere (relativisticamente) il campo gravitazionale, e ciò (per la definizione stessa del concetto di campo) equivale a dare le leggi della variazione (continua) del campo gravitazionale. Nel passaggio da un punto all'altro, lo spazio verrà ricoperto con sistemi inerziali locali (1), legati l'uno all'altro da opportune trasformazioni che, a differenza di quelle di Lorentz, risulteranno essere ora *non lineari*.

(1) Questo è come il comune processo di *mappatura* usato dai cartografi, ricoprendo l'intera superficie *sferica* terrestre con le *carte locali*, realzzate con i metodi di misurazione della *geometria piana*.

3. Le geometrie non-euclidee.

Per oltre due millenni, la geometria dominante è stata quella di Euclide, costruita su alcuni postulati, fra cui quello della retta, come percorso minimo fra due punti, e quello delle rette parallele. Solo nel diciannovesimo secolo si è visto, per opera di matematici quali: Gauss, Lobacevskij, Riemann, che, se si abbandonava il postulato delle rette parallele, si potevano costruire nuove geometrie (non-euclidee) in cui il concetto di retta veniva sostituito con quello metrico di *curva geodetica*, ossia il percorso di minor distanza fra due punti. Tale percorso minimo si misura sempre e solo sulle geodetiche, come si vede nella geometria sferica di Gauss, in cui le geodetiche (che qui svolgono il ruolo delle rette ed hanno sempre un punto in comune) sono i cerchi massimi della superficie sferica, cioè quelli a curvatura minima, come si vede nella figura seguente:

In queste nuove geometrie, tuttavia, avendo abbandonato il concetto di parallelismo, che era alla base del sistema cartesiano delle coordinate, sarà necessario introdurre nuove coordinate per descrivere la posizione spaziale dei punti. Un esempio di queste sono le *coordinate gaussiane* (*Nord* e *Est*) che si trovano in *cartografia*, che è la geometria sferica che descrive la superficie terrestre.
Un sistema di coordinate gaussiane si costruisce nel seguente modo:

Si immagini di tracciare su una superficie curva un sistema arbitrario di curve *u*, designate: *u=1*, *u=2*, *u=3,...* Fra le curve *u=1* e *u=2*, si immaginino tracciate le infinite curve che corrispondono a tutti i numeri reali compresi fra 1 e 2. Il sistema di curve *u* ricopre con continuità l'intera superficie. Le curve non si intersecano, ma per ogni punto della superficie passa una ed una sola curva. In modo analogo si immagini tracciato un secondo sistema di curve *v*. Così, ad ogni punto della superficie rimane univocamente associata una coppia di valori (*u,v*), che diremo le *coordinate gaussiane* del punto sulla superficie. Il metodo esposto vale per un continuo a due dimensioni, ma può essere applicato a spazi con 3, 4 e più dimensioni. Ad ogni punto si assegneranno, in maniera univoca, tante coordinate quante sono le dimensioni del continuo. Le coordinate gaussiane sono la generalizzazione logica delle coordinate cartesiane.

4. Lo spazio quadridimensionale di Minkowski

Occorre illustrare qui brevemente il formalismo introdotto da Minkowski, che rappresenta in maniera più efficace la geometria della relatività ristretta.
Secondo la fisica classica il tempo è assoluto, cioè indipendente dalla posizione e dallo stato di moto del sistema di coordinate. In teoria della relatività, il tempo viene defraudato della sua indipendenza, come mostra la quarta equazione della trasformazione di Lorentz. Questa può essere caratterizzata in modo più semplice, introducendo un parametro *immaginario* in luogo del tempo t :

$$x_1 = x$$

$$x_2 = y$$

$$x_3 = z$$

$$x_4 = \sqrt{-1}\; c\,t$$

(Questa sembra in pratica un'estensione alla quarta dimensione del diagramma di Argand-Gauss, in cui l'asse immaginario è normale all'asse reale).

In questo modo, il tempo x_4 entra nella descrizione delle leggi naturali nella stessa forma delle coordinate spaziali x_1, x_2, x_3.
Formalmente lo spazio di Minkowski è uno spazio euclideo a quattro dimensioni. La sua introduzione risultò molto utile ad Einstein nelle sue indagini sulla relatività generale.
L'uso dello spazio di Minkowski, descrive bene i fenomeni fisici in regioni infinitesime che circondano tutti i punti (spazio-tempo localmente piatto). In presenza di gravità, lo spazio-tempo viene descritto da una *varietà* curva a quattro dimensioni, per la quale lo spazio tangente ad ogni punto è uno spazio di Minkowski.

5. Equazioni di campo

Per descrivere il comportamento di un sistema fisico in un campo gravitazionale, e quindi ricavare le equazioni del campo, Einstein lo descrive prima, nel formalismo di Minkowski, in un riferimento infinitesimo in *caduta libera*, cioè inerziale, in cui valgono le leggi della relatività ristretta. Poi, eseguendo la trasformazione inversa di quella usata per ottenere il sistema in caduta libera, riconduce la descrizione nello spazio-tempo curvo che si ottiene collegando i vari sistemi inerziali infinitesimi in caduta libera.
Seguendo l'idea illustrata nel paragrafo 1., Einstein prende in esame, nel suo laboratorio infinitesimo in caduta libera, il *moto di un punto materiale libero in un campo gravitazionale*, che nel sistema localmente inerziale del laboratorio risulta essere in moto rettilineo uniforme. Affinché questo stato di moto non vari nel tempo, e quindi possa essere studiato, il laboratorio deve percorrere, solidalmente col punto in esame, una geodetica dello spazio-tempo. Ogni deviazione da tale percorso rivelerà il campo, e quindi lo descriverà. Un osservatore esterno vede così, su larga scala, un punto materiale che si muove lungo una traiettoria curva, la geodetica, piegata dalla gravità. Questa traiettoria si ottiene collegando tutti i punti attraversati dal laboratorio infinitesimo e dal punto, successivamente e con continuità. L'insieme di tutte le geodetiche formerà lo spazio curvo nella sua interezza.

Osservazione importante

E' questa l'idea fondamentale di Einstein che ha condotto alla formulazione della sua teoria generale della relatività. Il punto materiale libero (1) in moto, osservato dall'esterno, descrive col suo movimento, una geometria curvilinea che, nel suo insieme, con l'addensarsi ed il rarefarsi delle curve, indica, in maniera univoca, la variazione spaziale dell'azione della sorgente del moto. E' allora possibile, per la biunivocità introdotta con il principio di equivalenza, e per la sua proprietà transitiva, sostituire direttamente alla descrizione fisica (dinamica) del fenomeno osservato (2), la descrizione di questa sua geometria (3). Questa è una geometria non-euclidea, a 4 dimensioni, per studiare la quale Einstein ha potuto servirsi degli strumenti matematici preconfezionati introdotti da Gauss e Riemann e poi perfezionati da Ricci e Levi Civita.

(1) In assenza di altre forze, diverse dalla gravità.
(2) Qui si considera, per convenienza, la variazione spaziale di una quantità scalare, come il potenziale.
(3) Come avviene nella rappresentazione tridimensionale dei campi in elettromagnetismo.

In accordo con l'idea testé osservata, per mettere in relazione la curvatura dello spazio-tempo alla sorgente del campo gravitazionale che lo ha generato, Einstein azzarda la seguente equazione:

$$A_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$$

dove al primo membro c'è la geometria ed al secondo la dinamica del moto in esame. $T_{\mu\nu}$ è il *tensore energia-impulso* della materia, candidato a rappresentare la sorgente del campo, e $A_{\mu\nu}$, il tensore di Einstein, è un tensore da costruire sulla metrica dello spazio-tempo, descritta dal tensore $g_{\mu\nu}$ e dalle sue derivate prime e seconde (essendo coinvolte nel problema la velocità e l'accelerazione). Utilizzando varie strutture e tecniche che i matematici avevano nel frattempo messo a punto, Einstein costruisce il suo tensore $A_{\mu\nu}$ e trova che:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = kT_{\mu\nu}$$

Confrontando formalmente (1) questo risultato con il *potenziale* gravitazionale newtoniano (che è una funzione *scalare* della posizione, data dall'equazione di Poisson), si ricava il valore di k :

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}$$

(1) Qui si sta applicando il *Principio di covarianza*, che afferma che la forma matematica di una legge fisica *non deve variare* in seguito ad una trasformazione di Lorentz delle coordinate.

e si può scrivere l'equazione di campo nella sua forma finale:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Questa equazione contiene, per come è stata ottenuta, tutte le informazioni geometriche necessarie per rappresentare lo spazio-tempo della relatività generale, in presenza di un campo gravitazionale. Essa è valida nell'approssimazione di *campo debole* e per piccole velocità conduce alla gravità newtoniana. Vi compaiono le seguenti grandezze tensoriali:

$R_{\mu\nu}$ = *tensore di curvatura di Ricci*, che misura il modo in cui il volume varia localmente rispetto al volume usuale di uno spazio euclideo,

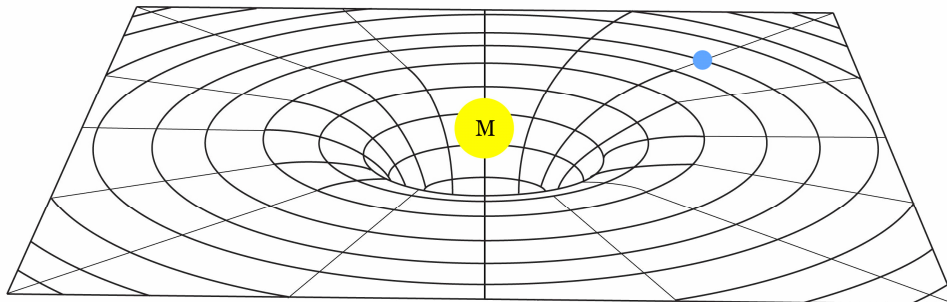
$g_{\mu\nu}$ = *tensore metrico*, che descrive la geometria locale dello spazio-tempo,

$T_{\mu\nu}$ = *tensore energia-impulso*, che descrive il flusso di energia e quantità di moto associate al campo,

oltre a *R*, il cosiddetto *scalare di curvatura*, a *G,* la costante di gravità newtoniana ed alla consueta velocità della luce c .

La ricerca in Relatività Generale consiste nel *tentare* la difficile impresa di risolvere le equazioni di campo nei casi distanti dai limiti di campo debole e piccole velocità, per indagare sui fenomeni estremi che si osservano nello spazio profondo, in condizioni di grande densità massa-energia, o in presenza di singolarità (buchi neri). Finora tali tentativi non hanno dato risultati degni di nota.

6. La rappresentazione del campo gravitazionale

Il campo gravitazionale newtoniano è un *campo vettoriale*, nel senso che, nella regione in cui esiste, è misurabile in ogni punto un vettore, caratterizzato da intensità, direzione e verso del campo in quel punto. La rappresentazione usuale dei campi vettoriali fa uso del concetto di *linea di campo*: una curva orientata la cui tangente in ogni punto ha la stessa direzione del campo in quel punto. Le linee di campo sono curve regolari e continue, tranne che in eventuali punti singolari, in genere coincidenti con la posizione della sorgente del campo. Queste linee si concentrano nello spazio dove il campo è più intenso e si rarefanno dove è debole. L'insieme di tutte le linee di campo descrive una superficie (spazio) curva.
La rappresentazione del campo gravitazionale della teoria della relatività generale, realizzata in analogia a quanto sopra descritto, illustra bene i nuovi concetti introdotti da Einstein. Esaminiamoli con riferimento alla figura seguente (che è un'analogia tridimensionale, non essendo possibile rappresentarvi la quarta dimensione, il tempo, anche essa incurvata dalla gravità) :

La presenza della massa M ha prodotto la deformazione dello spazio circostante, costringendoci a modificare la geometria da usare per descriverlo. Nella nuova geometria, la *geodetica* non è più una linea retta, per cui oggetti che altrimenti risulterebbero in moto rettilineo uniforme, in questo nuovo ambiente percorrono una geodetica dello spazio-tempo che non è più rettilinea, ma curvilinea.
Einstein ha *geometrizzato* la gravitazione universale, trasformandola da una descrizione dinamica ad una puramente geometrica, in cui le

traiettorie degli oggetti in moto (*orbite*) sono dovute non più alla forza di attrazione del Sole, ma al fatto che questo con la sua massa ha deformato la geometria dello spazio-tempo intorno a sé.
La curvatura dei raggi di luce, prevista dalla teoria ed osservata durante l'eclisse solare del 1919, si spiega così: non sono i raggi di luce che si incurvano, ma lo spazio in cui viaggiano.